Superfici differenziabili in $\mathbb{R}^3$

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 7 maggio 2020, durata 2 ore

Indice

Definizione di differenziale

Nell'iniziare la teoria delle superfici differenziabili in $\mathbb{R}^3$, si può far riferimento, oltre che ai libri di testo, alla terza e quarta video-lezione ICTP del Prof. C. Arezzo.

E' anche utile rivedere alcune pagine degli Appunti di Analisi II, Prof.sse A. Garroni e A. Malusa. Precisamente il Fascicolo IV (Calcolo differenziale per funzioni a valori vettoriali), pp. 1-3 e 17-29 (in particolare gli esempi 8,9,10); poi anche il Fascicolo IX (Uno sguardo in 3D), pp. 1-6.

Con riferimento a Garroni - Malusa, fasc. IV p. 1 (ma con diverse notazioni e terminologia), ricordiamo la seguente:

Definizione. Sia U un aperto del piano euclideo $\mathbb{R}^2$, sia $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione $\mathcal{C}^\infty$. Siano (u, v) le coordinate cartesiane in $U \subset \mathbb{R}^2$, (x, y, z) le coordinate cartesiane in $\mathbb{R}^3$, e siano

$$\alpha(u, v) : \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

le tre componenti di α. Si dice *differenziale* di α nel punto $q = (u_0, v_0) \in U$ l'applicazione lineare tra spazi vettoriali

$$\boxed{d\alpha_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$$

che nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ si rappresenta con la matrice jacobiana

$$J_q(\alpha) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix}$$

Condizione di regolarità

Definizione. Sia U un aperto del piano euclideo $\mathbb{R}^2$. Una *superficie parametrizzata regolare* di $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$, tale che il *differenziale* di α (rappresentato in ogni punto $q \in U$ dalla matrice Jacobiana di α) sia ovunque iniettivo.

Osservazione. Il confronto con la definizione di *curva differenziabile regolare* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mostra che la nozione appena introdotta ne è l'analogo in dimensione 2. La condizione di regolarità $\alpha'(t) \neq 0$ utilizzata per le curve è equivalente a richiedere che il *differenziale* di α sia iniettivo. Si noti infatti che se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, il differenziale $d\alpha_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è l'applicazione lineare definita dalla matrice jacobiana $J_{t_0} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))^t$.

Osservazione. Si ricorderà che la condizione di regolarità per curve garantisce in ogni punto $p = \alpha(t_0)$ l'esistenza della retta tangente. In modo analogo vedremo tra breve che la precedente condizione di regolarità $\operatorname{rank}(J_q(\alpha)) = 2$ per superfici garantisce in ogni punto $p = \alpha(q)$ l'esistenza del piano tangente.

Carte locali

Daremo tra breve una definizione più globale di superficie. Prima di fare ciò vi invito a guardare qualche disegno di superfici di $\mathbb{R}^3$, p. es. le "Famous surfaces" o le "Minimal surfaces" raggiungibili dalla pagina
virtualmathmuseum.org/Surface
Le figure suggeriscono che sia troppo limitativo considerare superfici che siano immagini di un'unica $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ovvero descritte da un'unica parametrizzazione.

Definizione. Un sottoinsieme connesso $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice una *superficie regolare* di $\mathbb{R}^3$ se per ogni $p \in S$ esiste un'applicazione $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che sia $\mathcal{C}^\infty$, con $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto, e tale che

- $\alpha(U) \subset S$ sia un intorno aperto di p in S e α sia un omeomorfismo da U a $\alpha(U)$;
- il differenziale $d\alpha_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sia iniettivo.

Carte locali

Le precedenti definizioni includono la possibilità di *riparametrizzare*.

Definizione. Una funzione $f : U_1 \to U$, tra aperti $U_1, U \subset \mathbb{R}^2$ è un *diffeomorfismo* se f è $\mathbb{C}^\infty$, biunivoca e tale che l'inversa insiemistica f^{-1} è anch'essa $\mathcal{C}^\infty$. Dunque f è espressa da un sistema di funzioni $u = f_1(u_1, v_2), v = f_2(u_1, v_1)$ tale che la matrice jacobiana del sistema sia ovunque invertibile.

Mediante i diffeomorfismi, secondo la precedente definizione, si può dunque passare dai *parametri locali* (u, v) ad altri parametri locali (u_1, v_1) sulla stessa porzione di superficie $\alpha(U)$.

Sono naturalmente possibili cambiamenti di parametri anche sull'intersezione di due *carte locali* $\alpha(U)$ e $\beta(U_1)$ tali che $p \in \alpha(U) \cap \beta(U_1)$. I sistemi di funzioni $u = f_1(u_1, v_2), v = f_2(u_1, v_1)$, necessariamente invertibili, rivestono particolare importanza come elemento irrinunciabile dell'*atlante* di carte locali che consentono di trattare globalmente la superficie.

Vettori tangenti a curve su superfici

Sia $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con parametri $(u, v) \in U$.

Per rappresentare una curva differenziabile regolare contenuta nella superficie S, si può partire da una curva differenziabile regolare su U, ovvero da funzioni $u = u(t), v = v(t)$ definite sull'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e tali che in ogni $t_0 \in I$ almeno una tra le derivate $u'(t_0)$ e $v'(t_0)$ sia non nulla.

Abbiamo dunque per la curva su S la seguente parametrizzazione

$$\gamma(t) = \alpha(u(t), v(t))$$

e se $q = (u(t_0), v(t_0))$, il vettore tangente in $p = \alpha(q)$ risulta

$$\gamma'(t_0) = \alpha_u(q)u'(t_0) + \alpha_v(q)v'(t_0).$$

La sua norma quadrata si esprime con il prodotto scalare $< \quad , \quad >$ di $\mathbb{R}^3$:

$$\|\gamma'(t_0)\|^2 = \|\alpha_u(q)u'(t_0) + \alpha_v(q)v'(t_0)\|^2 =< \alpha_u(q)u'(t_0) + \alpha_v(q)v'(t_0), \alpha_u(q)u'(t_0) + \alpha_v(q)v'(t_0) >=$$

$$=< \alpha_u(q), \alpha_u(q) > u'(t_0)^2 + 2 < \alpha_u(q), \alpha_v(q) > u'(t_0)v'(t_0)+ < \alpha_v(q), \alpha_v(q) > v'(t_0)^2.$$

Coefficienti E, F, G

Utilizzando altre notazioni (i seguenti simboli E, F, G sono stati introdotti da C. F. Gauss nel suo fondamentale lavoro sulle superfici, 1827), possiamo scrivere la precedente formula come:

$$\|\gamma'(t_0)\|^2 = Eu'(t_0)^2 + 2Fu'(t_0)v'(t_0) + Gv'(t_0)^2,$$

dove le seguenti funzioni di (u, v)

$$\boxed{E =< \alpha_u(q), \alpha_u(q) >, \quad F =< \alpha_u(q), \alpha_v(q) >, \quad G =< \alpha_v(q), \alpha_v(q) >}$$

valori del prodotto scalare sui vettori $(\alpha_u(q), \alpha_v(q))$ si dicono

coefficienti della prima forma fondamentale

della superficie parametrizzata regolare S: $\alpha(u, v)$.

Coefficienti E, F, G

Vedremo tra breve che i vettori α_u, α_v sono per una superficie regolare S e in ogni punto di essa, una base del *piano tangente* T_pS. Dunque i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale costituiscono gli elementi della matrice simmetrica definita positiva

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

che rappresenta nella base α_u, α_v, il campo di forme bilineari simmetriche definite positive

$I = \{I_p\}_{p \in S}$, dove per ogni $p \in S$, $\; I_p \; = < \quad , \quad >_p : T_pS \; \times \; T_pS \; \rightarrow \; \mathbb{R}$

è la restrizione a T_pS del prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$.

Tale campo $I = \{I_p\}_{p \in S}$ viene chiamato - lo ricordiamo - la *prima forma fondamentale* di S.

Formula della lunghezza con E, F, G

Sia $[a, b] \subset I \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^2$ la parametrizzazione $u = u(t), v = v(t)$ di un arco di curva regolare sulla superficie $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Posto

$$\gamma(t) = \alpha(u(t), v(t))$$

la lunghezza dell'arco di curva è dato dall'integrale

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}\, dt,$$

e l'ascissa curvilinea sulla curva dalla funzione integrale

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{Eu'(\tau)^2 + 2Fu'(\tau)v'(\tau) + Gv'(\tau)^2}\, d\tau.$$

È molto espressiva la classica formula (che subito si deduce da quanto sopra) del "quadrato dell'elemento di lunghezza" su una superficie:

$$\boxed{ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}$$

che evidenzia il ruolo di "pesi" dei coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale nel correggere il teorema di Pitagora infinitesimo, che sul piano è dato da $E \equiv G \equiv 1, F \equiv 0$, ovvero

$$\boxed{ds^2 = du^2 + dv^2}$$

Area e i coefficienti E, F, G

Sia $Q \subset U \subset \mathbb{R}^2$ un compatto contenuto nell'aperto U dove è definita la parametrizzazione regolare $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ della superficie S. Poichè α è un omeomorfismo, anche $R = \alpha(Q)$ è compatto, e chiamiamo R *regione limitata* su S. Come visto nel corso di Analisi II, l'area di R è data da:

$$\mathit{Area}\ (R) = \iint_Q \|\alpha_u \wedge \alpha_v\| dudv$$

cfr. Appunti di A. Garroni - A. Malusa, Fascicolo IX, def. IX.1.6, p.7.

Poichè $\|\alpha_u \wedge \alpha_v\| = \|\alpha_u\|\|\alpha_v\| \sin\theta$, $<\alpha_u, \alpha_v> = \|\alpha_u\|\|\alpha_v\| \cos\theta$, si ha

$$\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|^2 + <\alpha_u, \alpha_v>^2 = \|\alpha_u\|^2\|\alpha_v\|^2 = EG$$

Ma $<\alpha_u, \alpha_v> = F$, e dunque $\|\alpha_u \wedge \alpha_v\| = \sqrt{EG - F^2}$. Ne segue:

$$\boxed{\mathit{Area}\ (R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv}$$

Immagine del differenziale

Definizione. Sia S una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ con parametrizzazione

$$\alpha(u,v): \qquad x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v),$$

definita sull'aperto $U \subset \mathbb{R}^2$. La regolarità di S corrisponde alla condizione che il differenziale di α, per ogni $q \in U$

$$d\alpha_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

sia iniettivo. Dunque la matrice jacobiana

$$J_q(\alpha) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix}$$

ha ovunque rango 2.

Definizione. Il sottospazio vettoriale $\mathrm{Im}\, d\alpha_q$ di $\mathbb{R}^3$ e il piano affine per $p = \alpha(q)$ ad esso parallelo si dicono rispettivamente *piano vettoriale tangente* e *piano affine tangente* a S nel suo punto p. Questi piani sono spesso tra loro confusi e chiamati indifferentemente

Piano tangente

Il piano tangente alla superficie S nel suo punto p si denota con T_pS.

Base α_u, α_v

Si noti che se $p = \alpha(q)$, i vettori $(\alpha_u(q), \alpha_v(q))$ costituiscono una base per la giacitura del piano tangente T_pS. Si noti anche che T_pS contiene i vettori tangenti $\gamma'(t_0)$ di tutte le curve $\gamma(t) = \alpha(u(t), v(t))$ contenute in S e con $\gamma(t_0) = p$.

Equazione del piano tangente. Sia ancora $p = \alpha(q)$. Dal fatto che i vettori

$$\alpha_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q)), \quad \alpha_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q))$$

ne costituiscono una base, si ha subito che se $p = (x_0, y_0, z_0) \in S \subset \mathbb{R}^3$, l'equazione cartesiana del piano affine tangente T_pS è:

$$\boxed{T_pS : \quad \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(q) & y_u(q) & z_u(q) \\ x_v(q) & y_v(q) & z_v(q) \end{pmatrix} = 0}$$

$F(x,y,z)=0$

Anche per le superfici $S \subset \mathbb{R}^3$ sono frequenti altre rappresentazioni analitiche.

Grafico di funzione $z = f(x,y)$

Questa rappresentazione può essere vista come parametrica con

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u,v),$$

e la condizione di regolarità è automaticamente verificata. Sviluppando il determinante secondo la prima riga, l'equazione del piano tangente si scrive

$$\boxed{z - z_0 = f_x(p)(x - x_0) + f_y(p)(y - y_0)}$$

Rappresentazione cartesiana $F(x,y,z)=0$

La condizione di regolarità qui deve essere richiesta, assumendo che se $p = (x_0, y_0, z_0)$ è tale che $F(p) = 0$, una almeno tra $F_x(p), F_y(p), F_z(p)$ sia non nulla. Allora, se p. es. è $F_z(p) \neq 0$, per il teorema delle funzioni implicite esiste localmente una funzione differenziabile $z = f(x,y)$ con

$$F(x,y,f(x,y)) \equiv 0.$$

Dunque per derivazione totale risulta $F_x + F_z f_x \equiv F_y + F_z f_y \equiv 0$, e ne segue $f_x(p) = -\frac{F_x(p)}{F_z(p)}$, $f_y(p) = -\frac{F_y(p)}{F_z(p)}$. Ci si riconduce dunque al caso del grafico, e il piano tangente in $p = (x_0, y_0, z_0)$ alla superficie $F(x,y,z) = 0$ ha ora equazione cartesiana

$$\boxed{F_x(p)(x - x_0) + F_y(p)(y - y_0) + F_z(p)(z - z_0) = 0}$$

$I = \{I_p\}_{p\in S}$

Riassumendo, abbiamo considerato superfici $S \subset \mathbb{R}^3$ localmente rappresentate da equazioni parametriche

$$\alpha(u,v): \qquad x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v),$$

soddisfacenti la condizione di regolarità: ovunque $\alpha_u \wedge \alpha_v \neq \mathbf{0}$. In questa situazione abbiamo per ogni $p \in S$ il piano tangente:

$$T_pS: \quad \text{piano passante per } p \text{ e con giacitura data da } \alpha_u\,, \alpha_v$$

e un campo $I = \{I_p\}$ di prodotti scalari definiti positivi sui T_pS.

Tale campo I di prodotti scalari, la *prima forma fondamentale* di S, si rappresenta nella base (α_u, α_v) con la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, e consente di eseguire su S misure elementari.

Tra esse, la lunghezza di un arco di curva $\gamma(t) = \alpha(u(t), v(t))$, $t \in [a,b]$, dato dall'integrale

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}\, dt,$$

e l'area di una regione limitata $R \subset S$, $R = \alpha(Q)$

$$Area\,(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

$S^2(r)$ e il teorema di Archimede

Sia $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$, siano (θ, φ) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^2$ (che saranno latitudine e longitudine sulla sfera), sia

$$D = \overline{U} = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$$

e sia $r > 0$ fissato. Consideriamo le seguenti equazioni parametriche $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ della sfera $S^2(r)$ di centro l'origine e raggio r

$$\alpha(\theta, \varphi) : \qquad x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \cos\theta.$$

- Scrivere, al variare dei parametri θ e φ, i vettori α_θ e α_φ, e constatare che essi sono ovunque tangenti rispettivamente ai meridiani e ai paralleli della sfera.
- Calcolare i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale della sfera $S^2(r)$.
- Calcolare, usando la formula dell'area

  i) l'area di tutta la superficie sferica

  ii) l'area della "zona equatoriale", qui definita dalla limitazione $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$
- Constatare che, coerentemente con un importante teorema di Archimede "Sulla sfera e sul cilindro", in entrambe la situazioni i) e ii) risulta quanto segue.

  L'area della superficia sferica e l'area della zona equatoriale uguagliano quelle della superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera e che ha la stessa altezza della zona (totale o parziale) di superficie sferica considerata nei due casi.

Lunghezza della lossodromica

Sulla sfera $S^2(r)$ della precedente slide

$$\alpha(\theta, \varphi): \quad x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \cos\theta, \qquad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

si consideri la curva $C \subset S^2(r)$ data dalla equazioni parametriche

$$\theta = t, \quad \varphi = \log\left(\tan\frac{t}{2}\right), \qquad t \in (0, \pi).$$

- Scrivere la parametrizzazione $\gamma(t) = \alpha(\theta(t), \varphi(t))$, e determinare il vettore tangente $\gamma'(t)$.
- Calcolare il prodotto scalare $< \gamma'(t), \alpha_\theta(t, \varphi(t)) >$, dove α_θ è il vettore tangente ai meridiani, determinato nell'esercizio proposto nella precedente slide.
- Dedurre che la curva C forma, in ogni suo punto p, un angolo di $\frac{\pi}{4}$ (ovvero di 45 gradi) con il meridiano della sfera passante per p.

La curva C si chiama *lossodromica* (che significa "corsa obliqua") di angolo $\frac{\pi}{4}$. Si tratta di una curva assai facile da percorrere in navigazione, dovendo semplicemente fissare una rotta che forma un angolo costante con l'ago della bussola. Si noti che, avvicinandosi ai poli, C deve girare a spirale attorno ad essi senza raggiungerli.

- Calcolare, con un integrale improprio e usando la formula ricordata due slides fa, la lunghezza della lossodromica C nell'intervallo $[0, \pi]$.

Calcolo dell'area

Sia ora $U = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$, siano (θ, φ) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^2$ (che saranno ora latitudine e longitudine sul toro), sia

$$D = \overline{U} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2,$$

e siano $a > r > 0$ fissati.

Si consideri il toro generato dalla rotazione della circonferenza del piano xz (meridiano sul toro) $x = a + r\cos\theta$, $z = \sin\theta$, attorno all'asse z. Le equazioni parametriche $\alpha : D \to \mathbb{R}^3$ di tale toro si ottengono introducendo, partendo dalle equazioni parametriche del meridiano, un secondo parametro di rotazione, ovvero di longitudine φ. Si ottiene:

$$\alpha(\theta, \varphi) : \quad x = (a + r\cos\theta)\cos\varphi,\ y = (a + r\cos\theta)\sin\varphi,\ z = \sin\theta, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

- Scrivere, al variare dei parametri θ e φ, i vettori α_θ e α_φ, e constatare che essi sono ovunque tangenti rispettivamente ai meridiani e ai paralleli del toro.
- Calcolare i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale del toro.
- Calcolare, usando la formula dell'area, l'area di tutta la superficie torica, e constatare che essa uguaglia (in modalità "base per altezza") il prodotto della lunghezza di una circonferenza meridiano con la lunghezza della circonferenza "al centro del toro" (quest'ultima non appartenente alla superficie torica).